



Olimpiada Națională de Matematică 2016

Etapa locală – Iași, 1 februarie 2016

CLASA A V- A

Problema 1. Calculați: $(37^{2016} : 1369^{1008}) : (2^{2016} - 2^{2015} - \dots - 2^2 - 2 - 1)$

Soluție și barem

Observă că $1369 = 37^2$ 1p

Efectuează calculul: $(37^{2016} : (37^2)^{1008}) : (2^{2016} - 2^{2015} - \dots - 2^2 - 2 - 1) = \dots$ 1p

$$(37^{2016} : 37^{2016}) : ((2 \cdot 2^{2015} - 2^{2015}) - \dots - 2^2 - 2 - 1) = \dots$$
2p

$$1 : (2^{2015} - \dots - 2^2 - 2 - 1) = \dots 1 : (2 - 1) = 1 : 1 = 1 \dots$$
3p

Problema 2. Se consideră numărul natural $A = \overline{4a} + \overline{a4}$, unde a este o cifră diferită de 0. Se cere:

- Determinați cifra a pentru care numărul A este pătrat perfect.
- Arătați că nu există a astfel încât numărul A să fie cub perfect.

Soluție și barem

$$a) A = \overline{4a} + \overline{a4} = 40 + a + 10a + 4 = 11a + 44 = 11(a + 4) \dots$$
2p

Se deduce că $a = 7$ și $A = 11^2$ 1p

$$b) \text{ Pentru ca } A = 11(a + 4) \text{ să fie cub perfect ar trebui ca } a + 4 = 11^2 \dots$$
2p

Prin urmare $a = 11^2 - 4 = 117$ fals deoarece a este cifră.....2p

Problema 3. Determinați o mulțime finită M de numere natural consecutive, știind că diferența dintre cel mai mare și cel mai mic element este 2015, iar suma celor mai mici trei elemente ale mulțimii M este 2016.

Soluție și barem

$$\text{Fie } M = \{a + 1, a + 2, \dots, a + n\} \dots$$
1p

$$\text{Avem: } (a + n) - (a + 1) = 2015 \text{ și } a + 1 + a + 2 + a + 3 = 2016 \dots$$
3p

$$\text{Se obține } n = 2016 \text{ și } a = 670 \dots$$
2p

$$\text{Mulțimea căutată este } M = \{671, 672, 673, \dots, 2686\} \dots$$
1p



Problema 4. Un pițigoi a vizitat într-o zi 50 de crengi de copac. Pe prima creangă a ciripit o dată,

pe a doua creangă a ciripit de două ori și tot așa până când pe a 50-a creangă a ciripit de 50 de ori. Pițigoiul răgușește dacă într-o zi ciripește de 999 de ori. Răspundeți la următoarele întrebări:

- a) A răgușit pițigoiul în acea zi?
- b) De câte ori a ciripit răgușit?
- c) De câte ori a ciripit răgușit pe creanga pe care a răgușit?

Soluție și barem

a) Pițigoiul a ciripit de $1 + 2 + 3 + \dots + 50 = 1275$ de ori.2p

Cum $1275 > 999$, rezultă că a răgușit.1p

b) Cum $1275 - 999 = 276$ de ori.....2p

c) Cum $1 + 2 + 3 + \dots + 44 = 990$, rezultă că pițigoiul a răgușit pe a 45-a creangă, după ce a ciripit de 9 ori.....1p

Apoi el a ciripit de $45 - 9 = 36$ de ori.....1p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.



Olimpiada Națională de Matematică 2016

Etapă locală – Iași, 1 februarie 2016

CLASA a VI – a

Barem de corectare

Problema 1. Se consideră trei puncte coliniare A, B și C astfel încât $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$ și $AC = 40$ cm. Fie M și P mijloacele segmentelor $[AB]$, respectiv $[BC]$.

a) Să se determine lungimile segmentelor $[AB]$ și $[BC]$.

b) Să se determine valoarea raportului $\frac{AP}{MC}$.

Soluție și barem

Lungimile segmentelor $[AB]$, $[BC]$, respectiv valoarea raportului $\frac{AP}{MC}$ se vor calcula în funcție de poziția punctului C față de punctele A și B , folosind relația $AB = \frac{3}{5} \cdot BC$ 1 punct

Astfel :

a) Dacă $B \in [AC]$, atunci $AC = AB + BC = \frac{3}{5} \cdot BC + BC = \frac{8}{5} \cdot BC$; obținem ecuația $\frac{8}{5} \cdot BC = 40$, de unde $BC = 25$ cm, iar $AB = 15$ cm.

Dacă $C \in (BA)$, cum $BA < BC$ se deduce $A \in [BC]$ și atunci $AC = BC - AB = BC - \frac{3}{5} \cdot BC = \frac{2}{5} \cdot BC$.

Obținem ecuația $\frac{2}{5} \cdot BC = 40$, de unde $BC = 100$ cm, iar $AB = 60$ cm. 3 puncte

b) Dacă $B \in [AC]$, atunci $\frac{AP}{MC} = \frac{AB + \frac{BC}{2}}{BC + \frac{AB}{2}} = \frac{11}{13}$ 2 puncte

Dacă $A \in [BC]$, obținem $CA < CP < CM < CB$, adică punctele sunt în ordinea $C - A - P - M - B$, iar

$\frac{AP}{MC} = \frac{1}{7}$ 1 punct

Problema 2. a) Simplificați fracția $\frac{64}{ab64 - 36 \cdot ab}$, $a \neq 0$, astfel încât să devină ireductibilă.

b) Demonstrați că numărul $n = 3^{23} + 5^{23} + 15^{23}$ este divizibil cu 23.



Soluție și barem

a) $\overline{ab64} - 36 \cdot \overline{ab} = 100 \cdot \overline{ab} + 64 - 36 \cdot \overline{ab} = 64 \cdot (\overline{ab} + 1)$; după simplificare obținem: $\frac{1}{\overline{ab} + 1}$ 3 puncte

b) $n = 3^{23} + 5^{23} + 15^{23} = 3 \cdot 3^{22} + 5 \cdot 5^{22} + 15 \cdot 15^{22} =$ 2 puncte

$= 3 \cdot (M_{23} + 1) + 5 \cdot (M_{23} + 1) + 15 \cdot (M_{23} + 1) = M_{23} + 23 = M_{23}$ 2 puncte

Problema 3. Fie n și k numere naturale mai mari decât 2. Vom spune că n este *atras* de k , dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

1) n este divizibil cu k și are $k - 1$ divizori;

2) suma divizorilor lui n este divizibilă cu k , dar nu este divizibilă cu $k + 1$.

Să se determine cel mai mic număr n de trei cifre atras de 7.

Soluție și barem

Dacă n este *atras* de 7, atunci: 1) n este divizibil cu 7 și are $6 = 2 \cdot 3$ divizori; 2) suma divizorilor lui n este divizibilă cu 7, dar nu este divizibilă cu 8. Obținem $n = p^5$ sau $n = p_1 \cdot p_2^2$, unde p, p_1, p_2 sunt numere prime. 2 puncte

Fiind multiplu de 7, numărul n poate fi de forma: $n = 7^5$ sau $n = 7 \cdot p^2$ sau $n = 7^2 \cdot p$, unde p este factor prim, $p \neq 7$ 1 punct

Dacă $n = 7^5$, suma divizorilor lui n , adică: $1 + 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = 1 + M_7$, nu este divizibilă cu 7 - nu este îndeplinită condiția 2).

Dacă $n = 7 \cdot p^2$, suma divizorilor lui n , adică: $1 + 7 + p + 7p + p^2 + 7p^2 = 8 + 8p + 8p^2 = M_8$ - nu este îndeplinită condiția 2). 2 puncte

Dacă $n = 7^2 \cdot p$, suma divizorilor lui n , adică: $1 + 7 + 7^2 + p + 7p + 7^2 p = 57 + 57p = 57 \cdot (1 + p)$ este multiplu de 7, dacă $1 + p$ este multiplu de 7, p număr prim, minim. Astfel, $p = 13$ și $8 \times 57 \cdot 14$.

Numărul căutat este $n = 7^2 \cdot 13 = 637$ 2 puncte



Problema 4. Unghiul alungit $\angle A_1OA_{19}$ este împărțit în 18 unghiuri adiacente două câte două de semidreptele $[OA_2, [OA_3, \dots, [OA_{18}$, astfel încât $m(\angle A_2OA_3) = m(\angle A_1OA_2) + 1^\circ$, $m(\angle A_3OA_4) = m(\angle A_2OA_3) + 1^\circ$, $m(\angle A_4OA_5) = m(\angle A_3OA_4) + 1^\circ$, ..., $m(\angle A_{18}OA_{19}) = m(\angle A_{17}OA_{18}) + 1^\circ$.

a) Demonstrați că $1^\circ < m(\angle A_1OA_2) < 2^\circ$.

b) Demonstrați că $m(\angle A_1OA_3)$ este exprimată printr-un număr natural de grade.

c) Demonstrați că $OA_{12} \perp OA_{18}$.

Soluție și barem

Dacă $m(\angle A_1OA_2) = a$, atunci $m(\angle A_2OA_3) = a + 1^\circ$, $m(\angle A_3OA_4) = a + 2^\circ$, ..., $m(\angle A_{18}OA_{19}) = a + 17^\circ$.

a) $m(\angle A_1OA_{19}) = 180^\circ = 18a + (1^\circ + 2^\circ + \dots + 17^\circ) = 18a + 153^\circ$, de unde $18a = 27^\circ$, adică:

$$1 = \frac{18^\circ}{18} < a = \frac{27^\circ}{18} < \frac{36^\circ}{18} = 2. \dots\dots\dots 3 \text{ puncte}$$

$$b) m(\angle A_1OA_3) = m(\angle A_1OA_2) + m(\angle A_2OA_3) = 2a + 1^\circ = 2 \cdot \frac{27^\circ}{18} + 1^\circ = 4^\circ \in \mathbb{N}. \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$c) m(\angle A_{12}OA_{18}) = (a + 11) + (a + 12) + \dots + (a + 16) = 6a + 81^\circ = 6 \cdot \frac{27^\circ}{18} + 81^\circ = 90^\circ, \text{ adică } OA_{12} \perp OA_{18}. \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.



Olimpiada Națională de Matematică 2016

Etapa locală – Iași, 1 februarie 2016

CLASA A VII- A

Problema 1. Aflați numerele naturale nenule n , astfel încât $\sqrt{n!+3} \in \mathbb{Q}$, unde $n!=1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Soluție și barem:

Pentru $n=1$, se obține $\sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}$ 1p

Pentru $n=3$, se obține $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 + 3} = \sqrt{9} = 3 \in \mathbb{Q}$ 1p

Pentru $n=2,4,5$, se obține $\sqrt{n!+3} \notin \mathbb{Q}$ 1p

Pentru $n \geq 6$, se obține $\sqrt{n!+3} = \sqrt{3(1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n+1)}$ 2p

$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n+1 \in M_3 + 1$, deci $3(1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n+1)$ este multiplu de 3 fără a fi multiplu de 9, și nu este pătrat perfect, așadar $\sqrt{n!+3} \notin \mathbb{Q}$ 2p

Problema 2. Trei copii se joacă cu numere, în 2017 pași, astfel: la pasul 1 fiecare dintre ei are în mână un cartonaș pe care este scris un număr rațional pozitiv care nu este număr natural și astfel încât suma numerelor de pe cele trei cartonașe să fie număr natural. La pasul k fiecare dintre ei își pune cartonașul la spate și-l înlocuiește cu un altul pe care este scris numărul ce reprezintă suma numerelor celorlalți doi, de la pasul $k-1$, unde $2 \leq k \leq 2017$. Demonstrați că:

- la fiecare pas, suma numerelor aflate pe cartonașele din mâinile lor este număr natural;
- la fiecare pas, numărul aflat pe cartonașul din mâna fiecărui copil nu este natural;
- la pasul 2017, suma tuturor numerelor aflate pe cartonașele din spatele fiecărui jucător este aceeași, un număr natural divizibil cu 17.

Claudiu-Ștefan Popa

Soluție și barem:

- Notăm cu a_1 , b_1 și c_1 numerele raționale pozitive care nu sunt numere raționale aflate pe cartonașele ținute în mână de cei trei copii. $a_1 + b_1 + c_1 = s \in \mathbb{N}$

La pasul 2, $a_2 = b_1 + c_1$, $b_2 = a_1 + c_1$, $c_2 = a_1 + b_1$ și $a_2 + b_2 + c_2 = 2 \cdot (a_1 + b_1 + c_1) = 2s \in \mathbb{N}$

.....1p



La pasul k , $2 < k \leq 2017$,

$$a_k + b_k + c_k = 2 \cdot (a_{k-1} + b_{k-1} + c_{k-1}) = 2^2 \cdot (a_{k-2} + b_{k-2} + c_{k-2}) = \dots = 2^{k-1} \cdot s \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 1p$$

- b) Să presupunem, prin reducere la absurd, că $a_2 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow b_1 + c_1 \in \mathbb{N}$; prin urmare $a_1 + (b_1 + c_1) = s \notin \mathbb{N}$, ceea ce este fals. Rămâne că $a_2 \notin \mathbb{N}$. Similar se arată că b_2 și c_2 nu sunt numere naturale.....1p

Să presupunem, prin reducere la absurd, că $a_3 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow b_2 + c_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow a_2 + (b_2 + c_2) = 2^2 s \notin \mathbb{N}$, ceea ce este fals. Rămâne că $a_3 \notin \mathbb{N}$ și, la fel, b_3 și c_3 nu sunt numere naturale.

Mai departe, pas cu pas, se arată, la fel, că a_k, b_k și c_k nu sunt numere naturale, $2 < k \leq 2017$

.....1p

- c) La pasul 2017, la spatele unui copil se află cartonașele cu numerele $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$, în spatele altuia cele cu numerele $b_1, b_2, \dots, b_{2016}$ și în spatele celui de-al treilea cele cu numerele $c_1, c_2, \dots, c_{2016}$.

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2015} + a_{2016}) = (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \dots + (b_{2015} + b_{2016}) =$$

$$(c_1 + c_2) + (c_3 + c_4) + \dots + (c_{2015} + c_{2016}) = (a_1 + b_1 + c_1) + (a_3 + b_3 + c_3) + \dots + (a_{2015} + b_{2015} + c_{2015}) =$$

$$s \cdot (1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2014}) = s \cdot (1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{1007}) \dots\dots\dots 1p$$

$$4^k + 4^{k+1} + 4^{k+2} + 4^{k+3} = 4^k \cdot (1 + 4 + 4^2 + 4^3) = 4^k \cdot 85 : 17 \dots\dots\dots 1p$$

$$(1 + 4 + 4^2 + 4^3) + (4^4 + 4^5 + 4^6 + 4^7) + \dots + (4^{1004} + 4^{1005} + 4^{1006} + 4^{1007}) : 17 \dots\dots\dots 1p$$

Problema 3. În pătratul ABCD se ia punctul $M \in (BC)$, astfel încât $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{4}$. Dreapta DM

intersectează pe AC în Q și prelungirea lui (AB) în P. Aflați valoarea raportului $\frac{QM}{DP}$.

Marius Farcaș

Soluție și barem:

Din $BM \parallel AD$ rezultă $\triangle PBM \sim \triangle PAD$ deci: $\frac{BP}{PA} = \frac{BM}{DA} = \frac{MP}{DP} = \frac{1}{4}$. Rezultă $MP = \frac{1}{4} DP \dots\dots\dots 1p$

Din $\frac{BP}{AP} = \frac{1}{4}$, folosind proporții derivate se obține $AP = \frac{4}{3} AB \dots\dots\dots 2p$

Din $DC \parallel AP$ rezultă $\triangle QDC \sim \triangle QPA$ deci: $\frac{QD}{QP} = \frac{DC}{AP} = \frac{QC}{QA}$ și obținem $\frac{QD}{QP} = \frac{AB}{\frac{4}{3} AB}$, $QD = \frac{3}{7} DP \dots\dots\dots 2p$

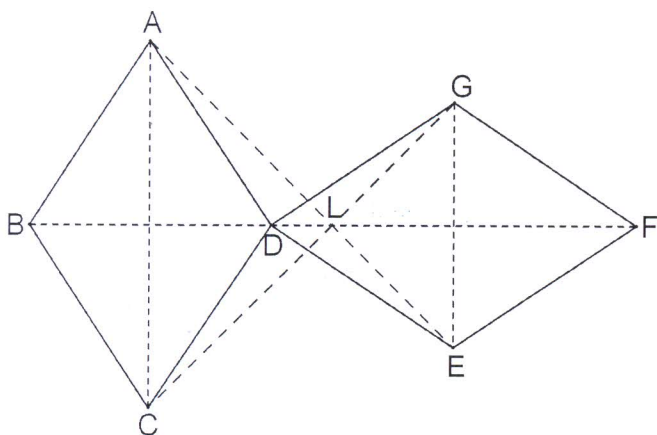
$$QM = DP - DQ - MP = DP - \frac{1}{4} DP - \frac{3}{7} DP = \frac{9}{28} DP. \text{ În final, } \frac{QM}{DP} = \frac{9}{28} \dots\dots\dots 2p$$

Problema 4. . Romburile $ABCD$ și $DEFG$ au un singur punct comun, $(AB) \equiv (DE)$, $\angle ABC \equiv \angle DEF$, iar punctele B, D și F sunt coliniare. Demonstrați că:

- $m(\angle ADG) = 90^\circ$;
- mijlocul segmentului $[BF]$ este punctul L , unde $\{L\} = AE \cap CG$;
- $BF \leq 2\sqrt{2} \cdot AB$.

Claudiu-Ștefan Popa

Soluție și barem:



a) $ABCD$ și $DEFG$ romburi, $\angle ABC \equiv \angle DEF$, $\angle ABC \equiv \angle ADC$ și $\angle DEF, \angle GDE$ sunt unghiuri suplementare $\Rightarrow \angle ADC, \angle GDE$ sunt unghiuri suplementare.....1p

În romburi diagonalele sunt conținute în bisectoarele unghiurilor lor, deci $\angle ADB \equiv \angle CDB$ și $\angle GDF \equiv \angle EDF$. Prin urmare $m(\angle ADG) = 180^\circ - [m(\angle ADB) + m(\angle GDF)] = 180^\circ -$

$$-\left[\frac{m(\angle ADC)}{2} + \frac{m(\angle GDE)}{2}\right] = 180^\circ - \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \dots\dots\dots 1p$$

b) La fel ca la a), $m(\angle CDE) = 90^\circ$. $m(\angle ADE) = m(\angle ADG) + m(\angle GDE) = 90^\circ + m(\angle GDE)$. Similar $m(\angle CDG) = 90^\circ + m(\angle GDE) \Rightarrow \angle ADE \equiv \angle CDG$.

$AD = DE = CD = DG \Rightarrow \triangle DAE \equiv \triangle DCG (LUL) \Rightarrow \angle DAE \equiv \angle DGC$; însă $AD \perp DG \Rightarrow AE \perp CG$ (am presupus $AC > BD$).....1p



$AC \perp BF$ și $EG \perp BF \Rightarrow AC \parallel EG$, deci $ACEG$ trapez. Din congruența triunghiurilor dreptunghice isoscele ADG și CDE rezultă $AG = CE$, deci $ACEG$ este trapez

isoscel. $\triangle ACG \equiv \triangle CAE (LUL) \Rightarrow \angle ACG \equiv \angle CAE \Rightarrow \triangle LAC$ isoscel $\Rightarrow \triangle LEG$ isoscel. Dacă notăm cu O_1 , respectiv O_2 intersecțiile diagonalelor romburilor $ABCD$, respectiv $DEFG$, cum LO_1, LO_2 sunt mediane în triunghiurile LAC , respectiv LEG , ele sunt și înălțimi, deci $LO_1 \perp AC$, $LO_2 \perp EG$. Însă $AC \parallel EG \Rightarrow O_1, L, O_2$ coliniare, deci $L \in BF$ 1p

În triunghiurile LAC și LEG , dreptunghice în L avem $LO_1 = \frac{AC}{2}$, respectiv $LO_2 = \frac{GE}{2}$, deci

$$LB = LO_1 + O_1B = \frac{AC}{2} + \frac{BD}{2} = \frac{DF}{2} + \frac{BD}{2} = \frac{BF}{2} \Rightarrow L \text{ este mijlocul segmentului } BF \dots\dots\dots 1p$$

$$c) A_{ACEG} = 2 \cdot A_{ADG} + A_{ACD} + A_{EDG} = 2 \cdot A_{ADG} + \frac{A_{ABCD}}{2} + \frac{A_{ABCD}}{2} = 2 \cdot A_{ADG} + A_{ABCD} = AB^2 + A_{ABCD} \leq 2 \cdot AB^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Însă } A_{ACEG} = \frac{O_1O_2 \cdot (AC + GE)}{2} = \left(\frac{BD + DF}{2} \right)^2 = \left(\frac{BF}{2} \right)^2. \text{ Deci, } \left(\frac{BF}{2} \right)^2 \leq 2 \cdot AB^2 \Rightarrow BF \leq 2\sqrt{2} \cdot AB \dots\dots\dots 1p$$

Obs. Soluția de mai sus, pentru b), presupune că cele două romburi nu sunt și pătrate. Pentru cazul particular în care cele două romburi sunt pătrate, cele trei cerințe sunt aproape evidente. Concurantul care tratează doar acest caz, primește 1p.

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.



Olimpiada Națională de Matematică 2016

Etapă locală – Iași, 1 februarie 2016

CLASA A VIII- A

Problema 1.

Soluție și barem

Relația din enunț se mai poate scrie sub forma $|a + 3| + (b - 7)^2 + (2c - 3)^2 = 3$2p

Cum $(2c - 3)^2 = \text{impar}$, iar

$|a + 3| \geq 0, (b - 7)^2 \geq 0, (2c - 3)^2 \geq 0 \Rightarrow (2c - 3)^2 = 1 \Rightarrow 2c - 3 \in \{-1, 1\} \Rightarrow c \in \{1, 2\}$1p

Relația din ipoteză devine: $|a + 3| + (b - 7)^2 = 2 \Rightarrow (b - 7)^2 \in \{0, 1\}$1p

Dacă $(b - 7)^2 = 0 \Rightarrow b = 7$ și $|a + 3| = 2 \Rightarrow a \in \{-5, -1\}$1p

Dacă $(b - 7)^2 = 1 \Rightarrow b \in \{6, 8\}$ și $|a + 3| = 1 \Rightarrow a \in \{-4, -2\}$1p

Finalizare:

$(a, b, c) \in$
 $\{(-5, 7, 1); (-5, 7, 2); (-1, 7, 1); (-1, 7, 2); (-4, 6, 1); (-4, 6, 2); (-4, 8, 1); (-4, 8, 2); (-2, 6, 1); (-2, 6, 2);$
 $(-2, 8, 1); (-2, 8, 2)\}$
1p

Problema 2.

Soluție și barem

a) Vom arăta că $n + 0,4 < \sqrt{n^2 + n} < n + 0,5, \forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde va rezulta concluzia problemei.....1p

Prin ridicare la pătrat obținem: $n^2 + 0,8n + 0,16 < n^2 + n < n^2 + n + 0,25$1p

A doua inegalitate este evidentă, în timp ce prima este echivalentă cu $0,2 \cdot n > 0,16 \Leftrightarrow n > 0,8$

adevărată pentru $n \in \mathbb{N}^*$1p

b) Observăm că $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \in (0,1) \Rightarrow [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}] = 0$1p

Prin urmare, prima zecimală a diferenței $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ va fi 2 dacă și numai dacă

$0,2 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0,3 \Leftrightarrow \frac{2}{10} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{3}{10} \Leftrightarrow \frac{10}{3} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < 5$2p

Pentru $n \geq 7$ inegalitatea $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} < 5$ nu este satisfăcută. În urma verificării numerelor rămase găsim $n \in \{3, 4, 5\}$1p



Problema 3.

Soluție și barem

Din $SO \parallel DC$, cum $DC \parallel AB \Rightarrow SO \parallel AB$ și $SO \parallel PR$1p

În $\triangle APR$ avem: $SO \parallel PR \Rightarrow \frac{SO}{PR} = \frac{SA}{AP}$ (1).....1p

În $\triangle PAB$ avem: $SO \parallel BA \Rightarrow \frac{SO}{AB} = \frac{SP}{AP}$ (2).....1p

Având (1) + (2) obținem $SO \cdot \left(\frac{1}{PR} + \frac{1}{AB} \right) = \frac{SA+SP}{AP} = 1$1p

și cum $PR = BC \Rightarrow SO = \frac{1}{\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC}} \Leftrightarrow SO = \frac{AB \cdot BC}{AB + BC}$ (3).....1p

Deoarece $DCPR$ trapez $\Rightarrow CD \neq PR = BC$, deci $AB \neq BC$

Aplicând inegalitatea mediilor pentru AB și $BC \Rightarrow AB + BC > 2\sqrt{AB \cdot BC}$ (inegalitatea este strictă)

$\Rightarrow \frac{1}{AB+BC} < \frac{1}{2\sqrt{AB \cdot BC}}$ și folosind (3) $\Rightarrow SO < \frac{1}{2}\sqrt{AB \cdot BC}$2p

Problema 4.

Soluție și barem

a) $AA' \cap BB' = \{O\} \Rightarrow (AA', BB') \cap CD = \{M\} \Rightarrow AA', BB'$ înălțimi și $\triangle ABM \Rightarrow MO \perp AB$1p

$\left. \begin{array}{l} CD \subset (BCD), AA' \perp CD \\ CD \subset (ACD), BB' \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} CD \perp (AA', BB') \\ AB \subset (AA', BB') \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp AB$1p

$\left. \begin{array}{l} AB \perp MO \\ AB \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp (COD)$1p

$\left. \begin{array}{l} CC' - \text{înălțime în tetraedru} \\ CC' \perp (ABD) \\ AB \subset (ABD) \end{array} \right\} \Rightarrow CC' \perp AB$1p

$\left. \begin{array}{l} DD' - \text{înălțime în tetraedru} \\ DD' \perp (ABC) \\ AB \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow DD' \perp AB$

$CD \perp AB$



Cum există un singur plan ce conține dreapta CD, perpendicular pe AB, \Rightarrow CD, DD' și CC' coplanare
 $\Rightarrow CC' \cap DD' \neq \emptyset$ 1p

b) $CD \perp (ABM) \Rightarrow AM \perp CD \Rightarrow AD^2 = AM^2 + MD^2, AC^2 = AM^2 + MC^2$

$CD \perp (ABM) \Rightarrow BM \perp CD \Rightarrow BC^2 = BM^2 + CM^2, BD^2 = BM^2 + MD^2$ 1p

$\Rightarrow AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$ 1p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.